ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2016, № 3

УДК 004.67

О.Р. Чертов, В.В. Мальчиков
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
пр. Перемоги, 37, м. Київ, 03056

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА МАСШТАБУВАННЯ НЕДІАДНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ НА ОСНОВІ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРУ

O. Chertov, V.V. Malchykov
National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine
Peremohy av., 37, Kyiv, 03056

METHOD FOR DETERMINING DILATION FACTOR OF THE NON-DYADIC WAVELET TRANSFORM BASED ON FREQUENCY SPECTRUM

У статті запропоновано метод вибору коефіцієнта масштабування недіадного вейвлет-перетворення на основі аналізу частотного спектру вихідного сигналу. Розглянуто застосування методу на прикладах модельного та реального сигналів.
Ключові слова: вейвлет-перетворення, коефіцієнт масштабування, ентропія.
The paper presents a method for determining a dilation factor of non-dyadic wavelet transform based on frequency spectrum. The application of the proposed method is shown on analysis of model and real signals.
Keywords: wavelet transform, dilation factor, entropy.

Вступ

Вейвлет-перетворення (ВП) є особливим типом лінійного перетворення сигналів і даних, що ними відображаються, про процеси та властивості природних і штучних середовищ та об'єктів. За допомогою ВП можна здійснювати частотно-часовий аналіз, результати якого містять як розподіл енергії сигналу за частотними складовими, так й інформацію про певні локальні координати, на яких відбувається швидка зміна відповідних складових сигналу. Наразі аналіз шляхом застосування ВП є одним із базових способів дослідження часових рядів, зокрема, й тих, що містять вихідні дані для систем підтримки прийняття рішень.

Постановка проблеми

На практиці найчастіше застосовуються діадні дискретні ВП, тобто ВП з коефіцієнтом масштабування, що дорівнює 2, бо вони мають найбільш ефективну програмну реалізацію.

Проте в деяких випадках вибір коефіцієнта масштабування рівний 2 не є найкращим рішенням. Наприклад, якщо пов'язані особливості досліджуваного явища містяться одразу в кількох сусідніх частотних інтервалах діадного ВП, то для адекватного аналізу цих даних набагато краще буде виконати розбиття частотної області на такі інтервали, які б повністю охоплювали зазначені особливості [2]. Інше міркування на користь недіадних ВП полягає в тому, що двійкове масштабування не завжди є природним для певної предметної області чи розв'язуваної задачі.

Оскільки замість двійки можна використовувати як коефіцієнт масштабування будь-яке інше раціональне число, більше одиниці, то постає задача оптимального підбору коефіцієнта масштабування.

Основні поняття

Нехай N — раціональне число, а $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ — функції з простору $L_2(\Re)$. Функція $\varphi(x)$ називається функцією масштабування, якщо вона задовольняє співвідношенню (1):

$$\varphi(x) = \sqrt{N} \cdot \sum_{k \in Z} h_k \cdot \varphi(Nx - k). \quad (1)$$

Число N називається коефіцієнтом масштабування ВП, а набір коефіцієнтів $\{h_k\}$ - низькочастотним фільтром розкладу.

Вейвлет $\psi(x)$ задовольняє співвідношенню (2), аналогічному до (1):

$$\psi(x) = \sqrt{N} \cdot \sum_{k \in Z} g_k \cdot \psi(Nx - k). \quad (2)$$

Набір коефіцієнтів $\{g_k\}$ називається високочастотним фільтром розкладу.

Якщо позначити через $a_{k,j}$ та $d_{k,j}$ відповідно апроксимуючі та деталізуючі коефіцієнти k-го рівня розкладу, то початковий сигнал $s(t)$ можна представити як суму його апроксимації на k-ому рівні і k деталізуючих складових:

$$s(t) = \sum_j \sqrt{N^j} \cdot a_{k,j} \cdot \varphi\left(N^j t - k\right) + \sum_{r=1}^{k} \sum_j \sqrt{N^j} \cdot d_{r,j} \cdot \psi\left(N^j t - r\right).$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На даний момент запропоновано декілька методів для виконання недіадного дискретного ВП із різним математичним підґрунтям та характеристиками. У роботі [3] авторами був проведений аналіз методів та визначені їх особливості.

Критерієм якості розкладення пропонується обрати ентропію. Інформаційна ентропія - це міра невизначеності чи непередбачуваності інформації [4]. У роботах [5] та [6] саме ентропія використовується як критерій для отримання оптимальної декомпозиції сигналу.

У [7] ентропія вейвлет-розкладення WE визначається наступним чином:

$$WE = -\sum_{j=1}^{N} p_j \ln p_j ,$$

де N - максимальний рівень розкладення;

p_j – відносна енергія вейвлет-розкладення, яка показує розподіл енергії по рівнях розкладення:

$$p_j = \frac{E_j}{E_{tot}} ,$$

E_j - величина енергії на j-ому рівні розкладення з кількістю деталізуючих коефіцієнтів N_j. Сукупність величин E_j утворює спектр вейвлет-енергії вихідного сигналу:

$$E_j = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} d_{j,k}^2 ,$$

E_{tot} – повна енергія вейвлет-спектру:

$$E_{tot} = \sum_{j=1}^{N} E_j \ .$$

Мета дослідження

Мета дослідження полягає в розробці методу вибору на основі частотного спектру вихідного сигналу такого коефіцієнта масштабування ВП, при якому буде досягнуто найбільш точне виділення наявних у сигналі періодичних особливостей.

Опис запропонованого методу та експериментальних результатів

Вибір коефіцієнта масштабування пропонується виконувати на основі аналізу частотного спектру вихідного сигналу. Періодичним особливостям відповідають частоти у спектрі із явно вираженими максимумами амплітуди. Отже, коефіцієнт масштабування потрібно (за можливості) обирати таким чином, щоб до кожного частотного інтервалу деталізуючих складових на кожному рівні розкладення потрапляв тільки один з таких максимумів.

У даній роботі недіадне ВП здійснюється методом, запропонованим в [8]. Його основними перевагами є можливість використання як коефіцієнта масштабування довільного раціонального числа *p/q* так і простого пірамідального алгоритму вейвлет-розкладення у частотній області. На кожному рівні розкладення обчислюються коефіцієнти для однієї апроксимаційної та *p-q* деталізуючих складових. За рахунок кількості деталізуючих складових та довжини відповідних частотних інтервалів можна досягти більш точного відокремлення особливостей вихідного сигналу.

Найбільш перспективним для проведення подальшого аналізу будемо вважати таке значення коефіцієнта масштабування, при якому ентропія вейвлет-розкладення буде мінімальною.

Розглянемо спочатку модельний сигнал (рис. 1), який представляє собою суму двох синусоїдальних сигналів. Його частотний спектр наведено на рис. 2, із якого видно, що обидві частотні особливості потрапляють в один інтервал діадного ВП.

Тому при використанні для аналізу цього сигналу діадного ВП чітке відокремлення зазначених періодичних особливостей неможливе.

Результати застосування вейвлетів Добеші 4-го порядку та Хаара наведені на рис. 3 та 4 відповідно. Як можна бачити, жодна з отриманих при цьому деталізуючих складових не схожа на синусоїду.

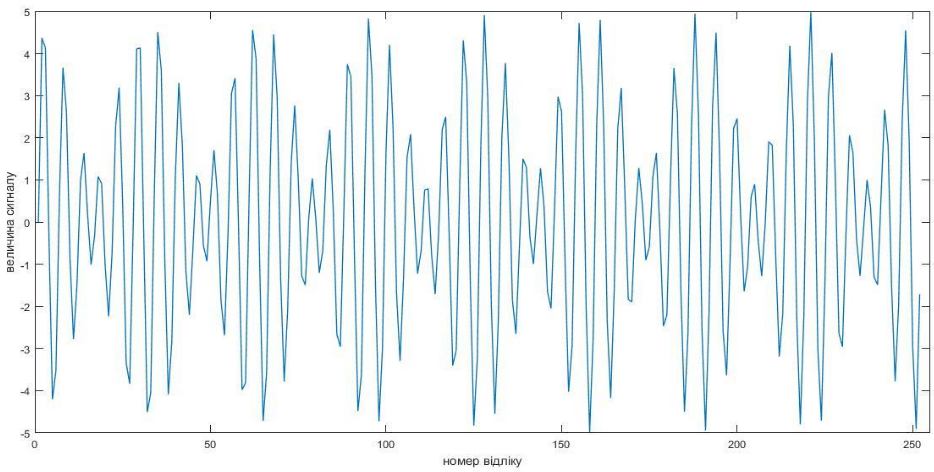


Рис.1 Модельний сигнал

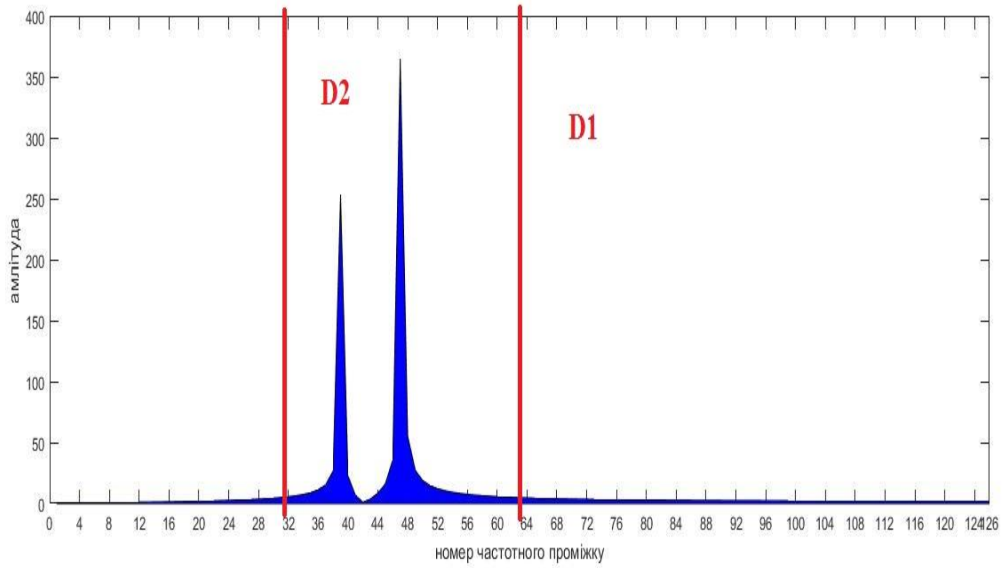


Рис. 2 Частотний спектр модельного сигналу та його діадне розбиття

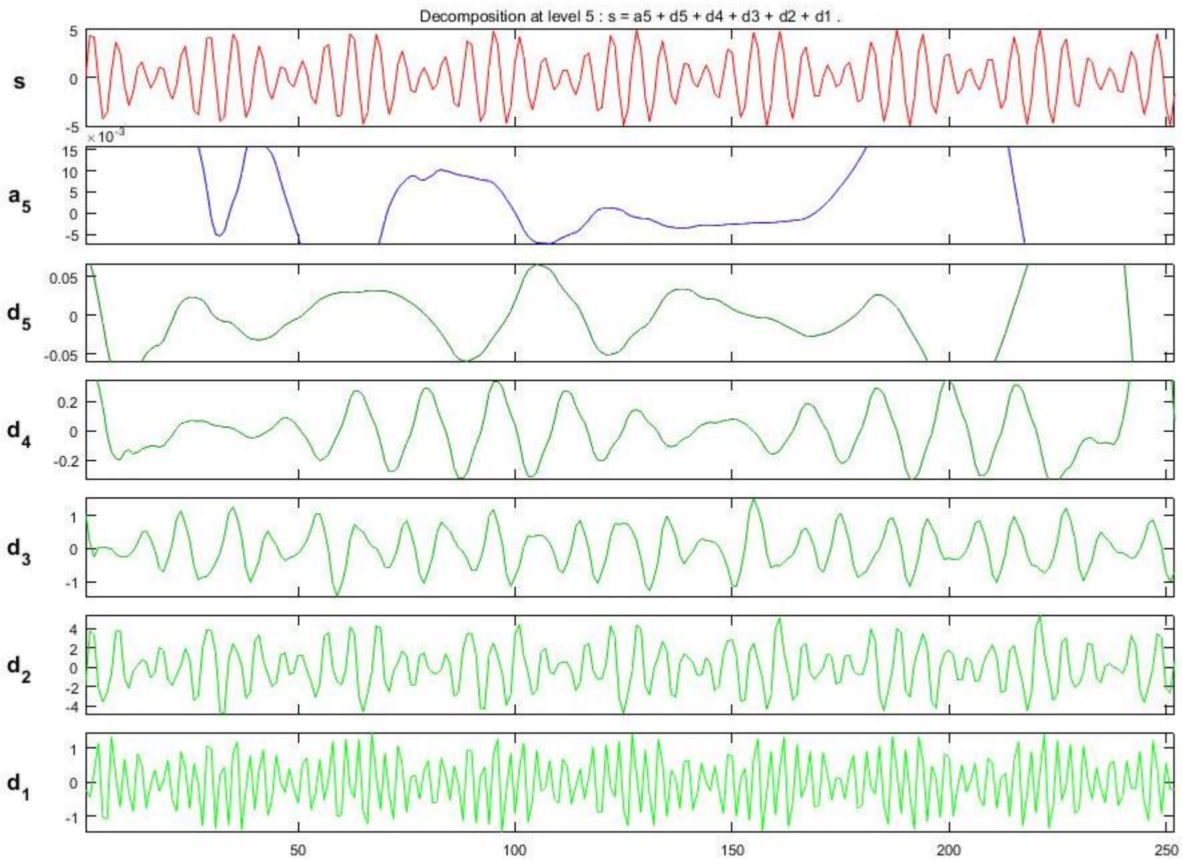


Рис. 3 Застосування вейвлета Добеші до модельного сигналу *s*:
a — апроксимаційна складова 5-го рівня розкладення, d_1, …, d_5 — деталізуючі складові відповідних рівнів розкладення

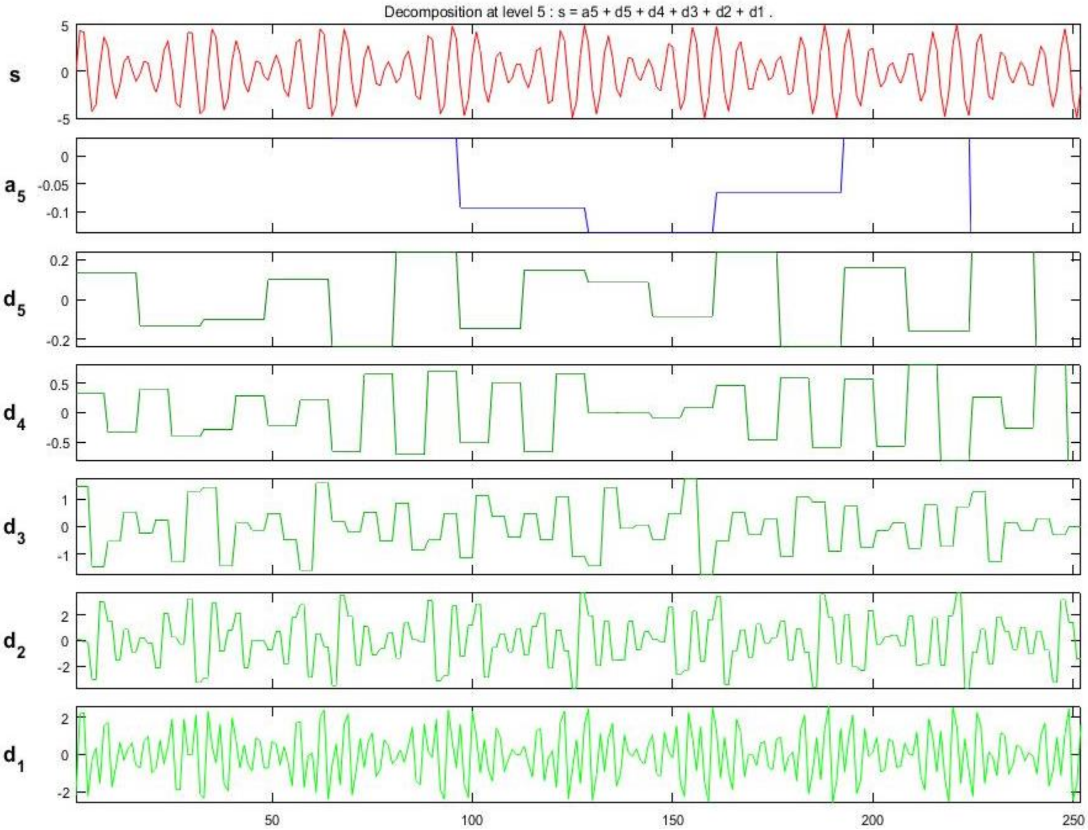


Рис. 4 Застосування вейвлета Хаара до модельного сигналу *s*:
a — апроксимаційна складова 5-го рівня розкладення, d_1, …, d_5 - деталізуючі складові відповідних рівнів розкладення

Проте, якщо виконувати розбиття частотного спектру на три частини (тобто виділяти при ВП на кожному рівні дві деталізуючі та одну апроксимаційну складові), то картина змінюється (рис. 5). Один з частотних піків потрапляє в частотний проміжок, що відповідає одній з деталізуючих складових першого рівня, а другий - в частотний проміжок для іншої з деталізуючих складових другого рівня вейвлет-розкладу.

Виходячи з цього, застосуємо до модельного сигналу обране недіадне ВП із коефіцієнтом масштабування, рівним трьом (тобто покладемо p=3, q=1). Обмежимося також третім рівнем розкладу (рис. 6). Як можна бачити, сума першої деталізуючої складової першого рівня та другої деталізуючої складової другого рівня розкладу достатньо близька за своєю формою до початкового модельного сигналу (рис. 7), відповідне середньоквадратичне відхилення дорівнює 0.1. Таке значення відхилення викликано впливом крайових ефектів перетворення Фур'є. Якщо відкинути по три відліки на початку та в кінці сигналу, то середньоквадратичне відхилення зменшується в 3,37 рази.

Той факт, що недіадне ВП виявилося кращим за діадне, підтверджується і чисельним критерієм. Величина ентропії для тріадного розкладу дорівнює 0,6817, а для діадного - 0,9335 та 0,9051 для вейвлетів Хаара та Добеші четвертого порядку відповідно.

Розглянемо тепер приклад з реальними даними, а саме: середньорічну ціну на пшеницю за період з 1500 по 1869 роки [9] (рис. 8). Відповідний частотний спектр наведено на рис. 9.

Виходячи з візуального аналізу частотного спектру, було обрано декілька значень коефіцієнта масштабування, при яких виконано вейвлет-розкладення вихідного сигналу до третього рівня та обчислено значення ентропії вейвлет-розкладення. Результати обчислень зведено до таблиці 1.

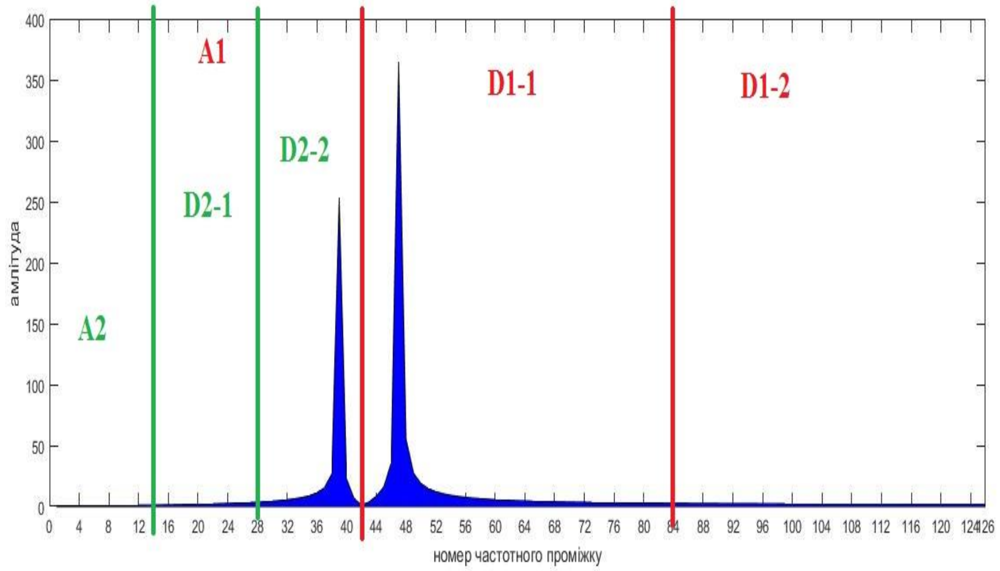


Рис. 5 Тріадне розбиття частотного спектру модельного сигналу

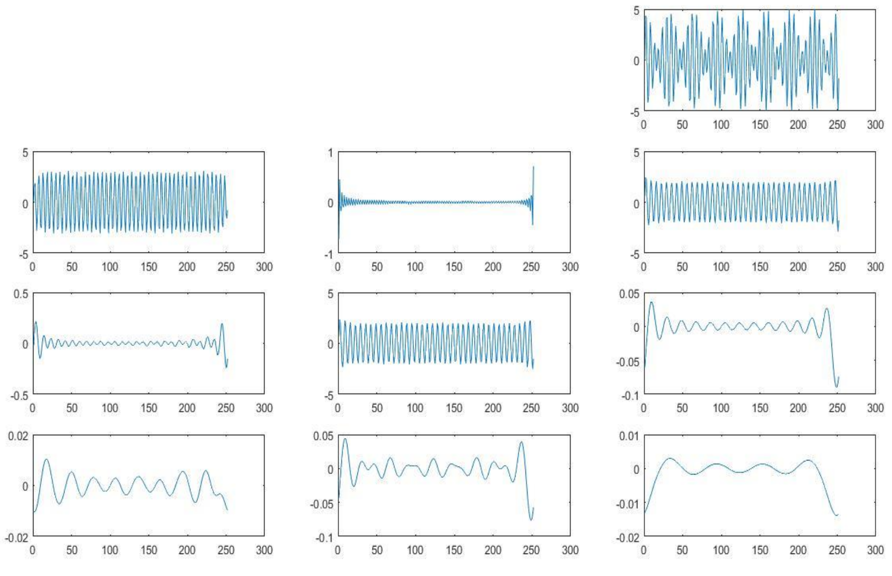


Рис. 6 Недіадне ВП із параметрами p=3, q=1, перший рядок - вихідний сигнал, наступні рядки - складові першого, другого та третього рівня розкладення (зліва направо - дві деталізуючі та апроксимаційна)

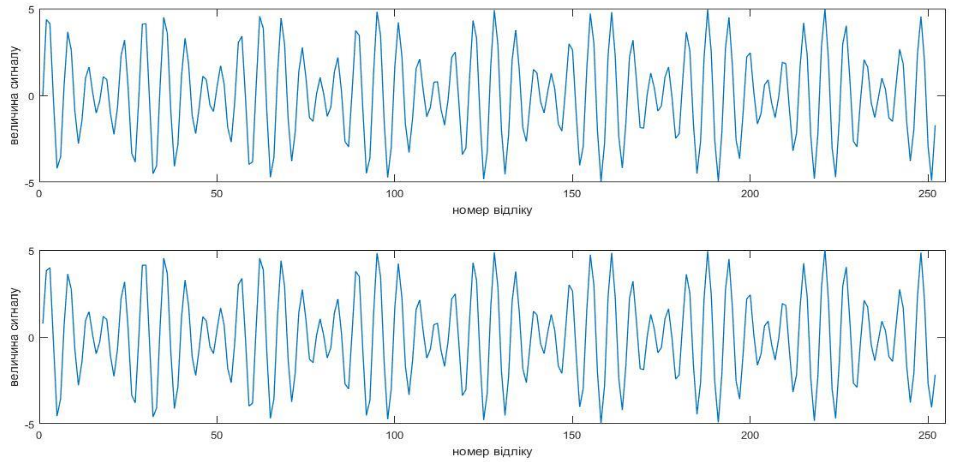


Рис. 7 Модельний сигнал (зверху) та сума двох деталізуючих складових (знизу)

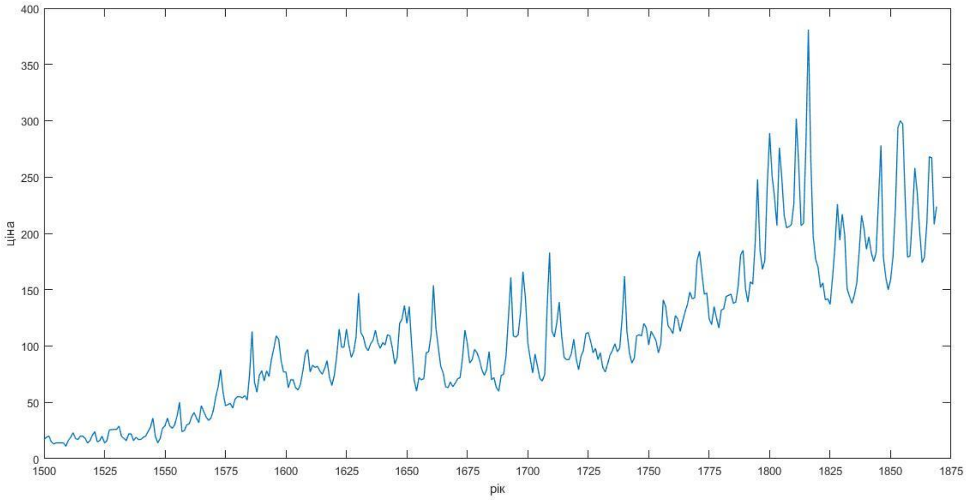


Рис. 8 Середньорічна ціна на пшеницю з 1500 по 1869 роки

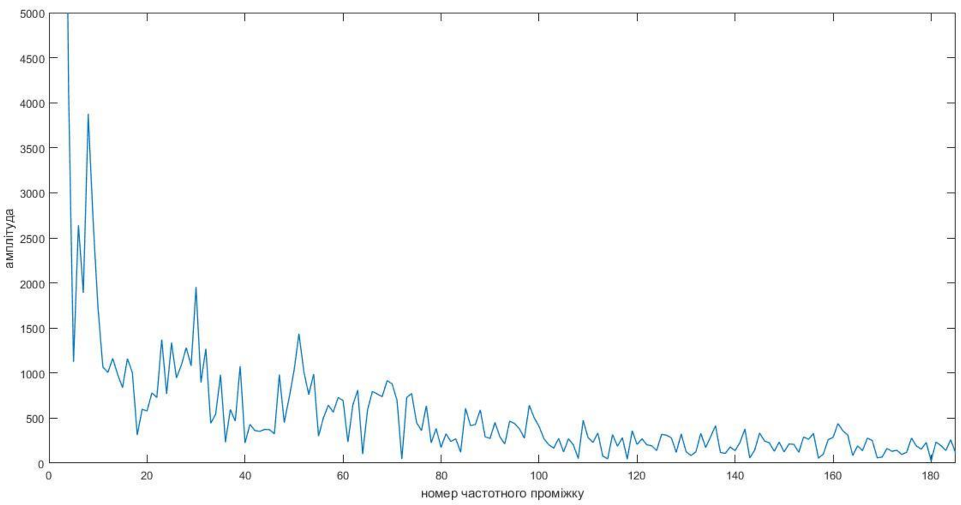


Рис.9 Частотний спектр реального сигналу

Таблиця 1 - Значення ентропії для обраних коефіцієнтів масштабування

Коефіцієнт масштабування	Ентропія
2 (Добеші 4-го порядку)	0,7270
2 (Хаар)	0,9598
9/4 (=2,25)	0,6950
5/2 (=2,5)	0,6352
3/1	0,6624

Найменше значення ентропії вейвлет-розкладення було досягнуто при коефіцієнті масштабування 5/2. І дійсно, при цьому значенні коефіцієнта певні деталізуючі складові, а саме: друга на другому та третьому рівнях розкладу вказують на наявність періодичних особливостей по всій довжині сигналу (рис. 10).

Виходячи з частотних інтервалів обраних деталізуючих складових, можна підрахувати, що цим особливостям відповідають періоди в 24-30 років та 60-70 років. Відповідь на питання про те, що саме призвело до таких періодичностей, потребує окремого дослідження і буде залежати, скоріш за все, від різних супутніх факторів (кліматичні умови, історичні події тощо).

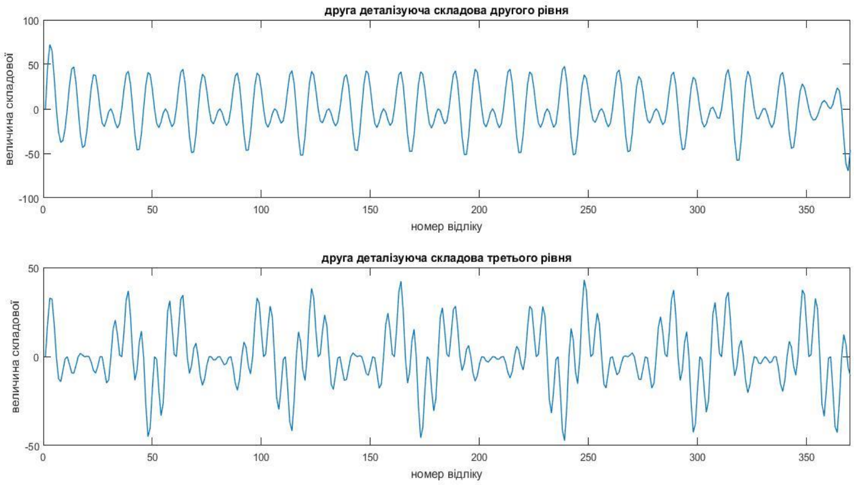


Рис. 10 Обрані деталізуючі складові розкладення при p=5, q=2

Висновки

У роботі запропоновано здійснювати вибір коефіцієнту масштабування дискет-ного ВП для виділення періодичних особливостей у вихідному сигналі на основі його частотного спектру.

Запропонований підхід було проілюстровано на модельному та реальному сигналі. Отримані результати показали, що використання недіадного ВП із визначеним коефіцієнтом виділяє наявні в сигналі періодичності, в тому числі й не очевидні.

Представляється перспективною розробка методу, в якому вибір коефіцієнту масштабування буде виконуватися автоматично на основі аналізу спектру вихідного сигналу. При цьому потрібно також приділити увагу співвідношенню між кількістю деталізуючих складових та шириною частотних інтервалів, що їм відповідають.

Література

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. - М.: Мир, 2005. - 671 с.

2. Pollock D.S.G. Non-dyadic wavelet analysis / D.S.G. Pollock, I.L. Cascio // Optimization, Econometric and Financial Analysis: Advances in Computational Management Science, Kontoghiorghes E.J., Gatu C. (eds.). - Springer Verlag. - 2007. - Vol. 9. - P. 167–204.
3. Чертов О.Р. Недиадні вейвлет-перетворення: дискретний випадок / О.Р. Чертов, В.В. Мальчиков // Вісник Харківського національного університету. - 2010. - N 925 - C. 140-146.
4. Martin N.F. Mathematical Theory of Entropy / N.F. Martin, J.W. England. - Addison Wesley, 1981. - 257 p.
5. Coifman R.R., Wickerhauser M.V. Entropy-based algorithms for best basis selection / R.R. Coifman, M.V. Wickerhauser // IEEE Trans. Inform. Theory. - 1992. - 38 (2). - P. 713-719.
6. Дубровин В.И. Исследование изменений энтропии и энергии на этапах декомпозиции сигнала / В.И. Дубровин, Ю.В. Твердохлеб // Радіоелектроніка, інформатика, управління. - 2013. - N 2. - C. 54-58.
7. Кротких С.С. Исследование вызванных потенциалов в ЭЭГ человека с помощью дискретного вейвлет-преобразования / С.С. Кротких, Л.О. Кириченко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. - 2011. – N 2. - C. 86-93.
8. Baussard A. Rational multiresolution analysis and fast wavelet transform: application to wavelet shrinkage denoising / A. Baussard, F. Nicolier, F. Truchetet // Signal Processing. - 2004. - Vol. 84, №10. - P. 1735-1747.
9. Beveridge W.H. Weather and Harvest Cycles // The Economic Journal. - 1921. - Vol. 31. - P. 429-452.

Literatura

1. Malla S. Veyvlety v obrabotke signalov. - M.: Mir, 2005. - 671 s.
2. Pollock D.S.G. Non-dyadic wavelet analysis / D.S.G. Pollock, I.L. Cascio // Optimization, Econometric and Financial Analysis: Advances in Computational Management Science, Kontoghiorghes E.J., Gatu C. (eds.). - Springer Verlag. - 2007. - Vol. 9. - P. 167–204.
3. Chertov O.R. Nediadni veyvlet-peretvorennya: dyskretniy vypadok / O.R. Chertov, V.V. Malchikov // Visnyk Harkivskogo natsionalnogo universitetu. - 2010. - N 925 - S. 140-146.
4. Martin N.F. Mathematical Theory of Entropy / N.F. Martin, J.W. England. - Addison Wesley, 1981. - 257 p.
5. Coifman R.R., Wickerhauser M.V. Entropy-based algorithms for best basis selection / R.R. Coifman, M.V. Wickerhauser // IEEE Trans. Inform. Theory. - 1992. - 38 (2). - P. 713-719.
6. Dubrovin V.I. Issledovanie izmeneniy entropii i energii na etapah dekompozitsii signala / V.I. Dubrovin, Yu.V. Tverdohleb // Radioelektronika, informatyka, upravlinnya. - 2013. - № 2. - S. 54-58.
7. Krotkih S.S. Issledovanie vyzvannyh potentsialov v EEG cheloveka s pomoschyu diskretnogo veyvlet-preobrazovaniya / S.S. Krotkih, L.O. Kirichenko // Radioelektronika, informatyka, upravlinnya. - 2011. - № 2. - S. 86-93.
8. Baussard A. Rational multiresolution analysis and fast wavelet transform: application to wavelet shrinkage denoising / A. Baussard, F. Nicolier, F. Truchetet // Signal Processing. - 2004. - Vol. 84, №10. - P. 1735-1747.
9. Beveridge W.H. Weather and Harvest Cycles // The Economic Journal. - 1921. - Vol. 31. - P. 429-452.

RESUME

O. Chertov, V.V. Malchykov

Method for determining dilation factor of the non-dyadic wavelet transform based on frequency spectrum

In this article, authors proposed a method based on the analysis of the frequency spectrum of the input signal for determining the dilation factor of the non-dyadic wavelet transform which will achieve the most accurate detection of the periodical features that are present in the signal.

Dilation factor has to be selected in such a way that each frequency band at every level of wavelet decomposition should contain no more than one maximum of frequency amplitude.

For non-dyadic wavelet decomposition, the method that use the arbitrary rational number as a dilation factor has been selected. Entropy of wavelet decomposition was chosen as a criterion of decomposition quality.

Application of proposed method was demonstrated on two examples with model and real data. The average annual price of wheat over the period from 1500 to 1869 years was taken as a real signal. The proposed method allowed identifying in this signal two periodicals cycles in 24-30 years and 60-70 years, which were not visible in the original signal.

It seems promising to improve the method in which the dilation factor selection will be done automatically by analyzing the frequency spectrum of the original signal.

Надійшла до редакції 27.09.2016